Г. Р. Юнусова

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,

ggg-ggg@mail.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{xx} + (sgn\ y)u_{yy} - b^2u = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в области $D = \{(x,y)|0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b \geqslant 0$ – заданные действительные числа.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*
$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+)$; $f_i(x) \in C(0,1) \cap L[0,1], i = 1,2$;
$Lu(x,y) \equiv f(x,y)$, $(x,y) \in D_- \cup D_+$;
$u(0,y) = u(1,y) = 0$; $u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x)$;
$u_y(x,-\alpha) = \psi(x)$; $u_y(x,\beta) = h(x)$; $u(x,d) = g(x)$,
где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(x)$, $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$, $h(0) = h(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $0 < d < \beta$ – заданное действительное число.

Методом спектральных разложений решение задачи определяется в виде суммы рядов:

$$u(x,y) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\sin(\pi kx),$$

$$f_i(x) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} f_{ik}\sin(\pi k x),\ i = 1, 2,$$

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\mu_k y} + b_k e^{-\mu_k y} - \dfrac{f_{1k}}{\mu_k^2},\ y > 0, \\ \left(a_k + b_k + \dfrac{f_{2k} - f_{1k}}{\mu_k^2}\right)\cos(\mu_k y) + \\ +(a_k - b_k)\sin(\mu_k y) - \frac{f_{2k}}{\mu_k^2},\ y < 0, \end{cases}$$

где коэффициенты a_k, b_k, f_{1k} и f_{2k} определяются по формулам

$$a_k = \frac{\mu_k\varphi_k \sin\mu_k\alpha e^{-\mu_k\beta} - \psi_k\cos\mu_k\alpha e^{-\mu_k\beta} + h_k(1 - \sin\mu_k\alpha e^{-\mu_k\beta})}{\Delta(k)},$$

$$b_k = \frac{\mu_k\varphi_k \sin\mu_k\alpha e^{\mu_k\beta} - \psi_k\cos\mu_k\alpha e^{\mu_k\beta} + h_k(1 + \sin\mu_k\alpha e^{\mu_k\beta})}{\Delta(k)},$$

$$f_{1k} = \mu_k^2\Big[\frac{(\mu_k\varphi_k\sin\mu_k\alpha - \psi_k\cos\mu_k\alpha)\operatorname{ch}\mu_k(\beta - d)}{\Delta(k)} +$$

$$+\frac{h_k(2\operatorname{ch}\mu_k d + \sin\mu_k\alpha\operatorname{sh}\mu_k(\beta - d))}{\Delta(k)} -$$

$$-\frac{g_k(\sin 2\mu_k\alpha\operatorname{ch}\mu_k\beta - \cos 2\mu_k\alpha\operatorname{sh}\mu_k\beta - 2\sin\mu_k\alpha)}{\Delta(k)}\Big],$$

$$f_{2k} = \mu_k^2\Big[\frac{2\mu_k\varphi_k\sin\mu_k\alpha(\operatorname{ch}\mu_k d - 1)e^{\mu_k\beta}}{\Delta(k)} +$$

$$+\frac{\psi_k(\cos\mu_k\alpha e^{\mu_k\beta}(2 - \operatorname{ch}\mu_k d) - e^{2\mu_k\beta} - 1)}{\Delta(k)} +$$

$$+\frac{2\mu_k g_k\sin\mu_k\alpha\operatorname{sh}\mu_k\beta(2\cos\mu_k\alpha + e^{-\mu_k\beta})}{\Delta(k)} +$$

$$+\frac{2h_k(\sin\mu_k\alpha(\operatorname{sh}\mu_k(\beta - d) - \operatorname{sh}\mu_k\beta) + \cos\mu_k\alpha\operatorname{ch}\mu_k\beta + \operatorname{ch}\mu_k d - 1)}{\Delta(k)}\Big]$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta(k) = 2\mu_k\left[\operatorname{sh}\mu_k\beta - \sin\mu_k\alpha\right] \neq 0, \tag{2}$$

здесь φ_k, ψ_k, g_k и h_k – коэффициенты разложения соответственно функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ в ряд Фурье по системе $\{\sqrt{2}\sin(\pi kx)\}$ на промежутке $[0,1]$.

Теорема. *Если существует решение обратной задачи для уравнения* (1), *то оно единственно, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (2).

Р. Р. Яматов

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. Зайнаб Биишевой,

yamaovrim@ya.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Большинство крупных нефтегазовых месторождений (например, Самотлор) представляет собой ассоциации слабоконтрастных и малоразмерных залежей углеводородов. Характеристики нефтегазонасыщенных систем, представленных пористыми или трещиноватыми средами, в существенной мере определяются хаотическим распределением зерен породы, капилляров и трещин по форме и размерам. Как известно, пористые среды – среды фрактальной структуры. Важной эксплуатационной характеристикой подобных систем является коэффициент проницаемости, который можно рассчитать, если знать распределение поровых пустот (коэффициент пористости и связность поровых каналов), т. е. если известна структура среды, отвечающая стохастическому распределению поровых пустот, капилляров и трещинных каналов.

Встречающихся в природе фрактальные структуры являются квазифракталами (рис. 1), поскольку на некотором малом